ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-5-14
УДК 517.938

О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем

Александр Петрович АФАНАСЬЕВ[1,2,3] **, Сергей Михайлович ДЗЮБА**[4]

[1] ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича» Российской академии наук
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19
[2] ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Российская Федерация, г. Москва, ул. Мясницкая, 20
[3] ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1
[4] ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems

Aleksandr P. AFANAS'EV[1,2,3] **, Sergei M. DZYUBA**[4]

[1] Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences
19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation
[2] HSE University
20 Myasnitskaya St., Moscow 101000, Russian Federation
[3] Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation
[4] Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Аннотация. В статье приведено новое свойство рекуррентных движений динамических систем. В компактном метрическом пространстве данное свойство устанавливает связь между движениями общего вида и рекуррентными движениями. Кроме того, это свойство устанавливает весьма простой характер поведения рекуррентных движений, что органично дополняет классическое определение, приведенное в монографии [В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. URSS, М., 2004].

Впервые указанное выше новое свойство рекуррентных движений фактически было анонсировано в более ранней статье авторов [А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба. О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005, т. 41, № 11, с. 1469–1474]. В этой же статье приведено краткое доказательство соответствующей теоремы. Это доказательство оказалось слишком схематичным. Кроме того, оно (доказательство) содержит ряд очевидных пробелов.

Некоторое время назад выяснилось, что на основании данного нового свойства можно показать, что в компактном метрическом пространстве α- и ω-предельные множества каждого движения являются минимальными. Из этого следует, что в компактном метрическом пространстве каждое положительно (отрицательно) устойчивое по Пуассону движение является рекуррентным.

Значение этих результатов очевидно. Они ясно указывают причину того, что в настоящее время отсутствуют критерии существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений. Более того, они показывают причину того, что известные попытки построения устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений на компактных замкнутых многообразиях оказались неудачными; во всяком случае примеров таких движений нет.

Ключевым для нового свойства минимальных множеств является указанное новое свойство рекуррентных движений. Поэтому в настоящей статье мы приводим полное и подробное доказательство этого свойства.

Впервые результаты настоящей работы были доложены 28 января 2020 г. на семинаре Добрушинской математической лаборатории в ИППИ РАН им. А. А. Харкевича.

Ключевые слова: динамические системы; минимальные множества; рекуррентные и устойчивые по Пуассону движения

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00842_а, № 20-01-00347_а).

Для цитирования: *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 5–14. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-5-14.

Abstract. The article presents a new property of recurrent motions of dynamical systems. Within a compact metric space, this property establishes the relation between motions of general type and recurrent motions. Besides, this property establishes rather simple behaviour of recurrent motions, thus naturally corroborating the classical definition given in the monograph [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov. Qualitative Theory of Differential Equations. URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

Actually, the above-stated new property of recurrent motions was announced, for the first time, in the earlier article by the same authors [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba. On recurrent trajectories, minimal sets, and quasiperoidic motions of dynamical systems // Differential Equations. 2005, v. 41, № 11, p. 1544–1549]. The very same article provides a short proof for the corresponding theorem. The proof in question turned out to be too schematic. Moreover, it (the proof) includes a range of obvious gaps.

Some time ago it was found that, on the basis of this new property, it is possible to show that within a compact metric space α- and ω-limit sets of each and every motion are minimal. Therefore, within a compact metric space each and every motion, which is positively (negatively) stable in the sense of Poisson, is recurrent.

Those results are of obvious significance. They clearly show the reason why, at present, there are no criteria for existence of non-recurrent motions stable in the sense of Poisson. Moreover, those results show the reason why the existing attempts of creating non-recurrent motions, stable in the sense of Poisson, on compact closed manifolds turned out to be futile. At least, there are no examples of such motions.

The key point of the new property of minimal sets is the stated new property of recurrent motions. That is why here, in our present article, we provide a full and detailed proof for that latter property.

For the first time, the results of the present study were reported on the 28th of January, 2020 at a seminar of Dobrushin Mathematic Laboratory at the Institute for Information Transmission Problems named after A. A. Kharkevich of the Russian Academy of Sciences.

Keywords: dynamical systems; minimal sets; recurrent motions and motions stable in the sense of Poisson

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-01-00842_a, no. 20-01-00347_a).

For citation: Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. O novykh svoystvakh rekurrentnykh dvizheniy i minimal'nykh mnozhestv dinamicheskikh sistem [About new properties of recurrent motions and

minimal sets of dynamical systems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 5–14. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-5-14. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}\times\Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t,p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$;

(b) для всех $p \in \Sigma$ справедливо равенство

$$g^0 p = p;$$

(c) для всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполнено групповое свойство

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t — динамическая система, а функция $t \to f(t,p)$ — движение, если точка $p \in \Sigma$ фиксирована (см. [1, с. 347]).

Примерами системы g^t могут служить группы преобразований, порожденные автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и автономными системами функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, и некоторые другие (см., например, [2, гл. 4]).

Важнейшим из движений, как известно, является рекуррентное. Напомним, что движение $f(t,p)$ называется рекуррентным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ дуга

$$K_{\tau,T} = \{f(t,p)\colon\ t \in [\tau, \tau+T]\}$$

траектории

$$K = \{f(t,p)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию K с точностью до ε (см. [1, с. 402]).

В полном метрическом пространстве замыкание траектории рекуррентного движения представляет собой компактное минимальное множество (см. [1, с. 404]). При этом каждое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см. [1, с. 401]). Более полно, найдется такая вполне упорядоченная система компактных инвариантных множеств

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots \supset M_\omega \supset M_{\omega+1} \supset \ldots, \qquad (0.1)$$

занумерованных всеми порядковыми числами первого и второго классов, что выполнено равенство

$$M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k \cap \ldots \cap M_\omega \cap M_{\omega+1} \cap \ldots$$

(см. [1, с. 349, 401]).

Дальнейшие исследования в данном направлении главным образом свелись к распространению определения рекуррентности на более широкий класс систем. При этом для некоторых систем достаточно общего вида было подробно изучено существование движений, асимптотически приближающихся к рекуррентным (см., например, [3–7]). Что касается системы g^t, то в работе [8] получено ранее не известное свойство рекуррентных движений. Дальнейшее развитие этого свойства позволило установить существование аналога рекуррентного движения для некоторого достаточно широкого класса систем, содержащего в себе как частный случай систему g^t (см. [9]).

Заметим теперь, что свойства системы (0.1) детально не изучались. Рассмотрение данной проблемы позволило выявить новые свойства рекуррентных движений и минимальных множеств системы g^t. Целью настоящей работы является изложение этих свойств.

1. Новое свойство рекуррентных движений

Предположим, что пространство Σ компактно. В таком пространстве новое свойство рекуррентных движений системы g^t устанавливает следующая

Теорема 1.1. *Пусть q — некоторая точка пространства Σ и $f(t,q)$ — соответствующее движение. Тогда для каждого положительного числа T из каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t,p)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) *равномерно на каждом из отрезков $[a,b]\subset\mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$\lim_{l\to+\infty} f(t+(N_{k_l}-1)T,q)=f(t,p);$$

(ii) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$\lim_{l\to+\infty} f(t+(N_{k_{l+1}}-N_{k_l})T,p)=f(t,p).$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое положительное число T. Для всех $N=1,2,\ldots$ положим

$$q_N=f((N-1)T,q). \tag{1.1}$$

Тогда, как несложно заметить, при этих значениях N имеет место равенство

$$q_N=\underbrace{g^T\ldots g^T}_{N-1}q.$$

Поэтому

$$q_{N+1}=g^Tq_N,\quad N=1,2,\ldots \tag{1.2}$$

Пусть теперь $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$ — произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствие с $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ из множества

$$q_1,q_2,\ldots,q_N,\ldots$$

выберем последовательность $(q_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Согласно компактности пространства Σ из $(q_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(q_{N_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, пределом которой является точка p, лежащая в ω-предельном множестве

$$\Omega=\bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s} f(t,q)}$$

движения $f(t,q)$. При этом множество Ω компактно и инвариантно, а движение $f(t,p)$ расположено в множестве Ω (см. [1, с. 358]).

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность $(q_{N_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ совпадает с последовательностью $(q_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Так как отображение $t\to g^t x$ непрерывно, оно равномерно непрерывно на произвольном отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Но пространство Σ компактно. Поэтому множество X функций

$$t\to f(t,q_N),\quad N=1,2,\dots,$$

определенных на всей оси $\mathbb{R}$, равностепенно непрерывно на произвольном отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ (см., например, [10, с. 212]). Следовательно, при $t\in\mathbb{R}$ равномерно на каждом из отрезков $[a,b]\subset\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(t,q_{N_k})=f(t,p). \tag{1.3}$$

Из непрерывности отображения $g^t x$ по t,x и компактности пространства Σ следует, что множество F функций

$$t\to f(t\pm NT,p),\quad N=0,1,\dots,$$

определенных на отрезке $[0,T]$, равностепенно непрерывно. Поэтому его замыкание $\bar F$ компактно в топологии равномерной сходимости (см., например, [11, с. 489]).

Для всех $k=1,2,\dots$ обозначим через X_{N_k} — множество функций

$$t\to f(t+NT,q_{N_k}),\quad N=0,1,\dots,$$

определенных на отрезке $[0,T]$. Тогда согласно равенствам (1.1) и (1.3) имеет место включение

$$\bar F_0\subset\bigcap_{k\geq 1}\bar X_{N_k}, \tag{1.4}$$

где $\bar X_{N_k}$ — замыкание множества X_{N_k}, а $\bar F_0$ — замыкание множества F_0 функций

$$t\to f(t+NT,p),\quad N=0,1,\dots,$$

также определенных на $[0,T]$, (см. [2, с. 101]).

Пусть

$$\Delta_{N_k}=N_{k+1}-N_k,\quad k=1,2,\dots$$

Поскольку в силу соотношений (1.1) и (1.2)

$$q_{N_{k+1}}=f(\Delta_{N_k}T,q_{N_k}),$$

то справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(\Delta_{N_k}T,q_{N_k})=p. \tag{1.5}$$

Более того, так как множество Ω компактно, без потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k\to+\infty} f(\Delta_{N_k}T,p)=p^*, \tag{1.6}$$

где $p^*\in\Omega$.

Если $p \neq p^*$, то в силу равенств (1.5) и (1.6) найдутся такие положительное ε и натуральное k_0, что при $k > k_0$ выполнено неравенство

$$d(f(\Delta_{N_k}T, q_{N_k}), f(\Delta_{N_k}T, p)) \geq \varepsilon. \tag{1.7}$$

В этом случае движение $f(t,p)$ не является периодическим движением с периодом, кратным T. Значит,

$$\sup_{k\geq 1} \Delta_{N_k} = +\infty$$

и

$$\sup_{k\geq 1} (\Delta_{N_{k+1}} - \Delta_{N_k}) = +\infty. \tag{1.8}$$

Пусть

$$t_k = (\Delta_{N_k} + 1)T, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Согласно неравенству (1.7) для всех $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0\leq t\leq t_k} d(f(t, q_{N_k}), f(t,p)) \geq \varepsilon.$$

Тогда в силу равенства (1.3) несложно построить такие последовательности $(\varepsilon_l)_{l\in\mathbb{N}} \downarrow 0$ положительных и $(k_l)_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что выполнены неравенства

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} d(f(t, q_{N_{k_l}}), f(t,p)) \geq \varepsilon \tag{1.9}$$

и

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} d(f(t, q_{N_{k_{l+1}}}), f(t,p)) < \varepsilon_l. \tag{1.10}$$

Легко видеть, что объединение

$$\bigcup_{l\geq 1} [0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0, t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $\mathbb{R}^+$. Более того, на каждом из таких отрезков $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (1.9) и (1.10). Последнее, однако, в силу равенства (1.8) и включения (1.4) невозможно.

Полученное противоречие означает, что справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(\Delta_{N_k}T, p) = p.$$

Поэтому равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(t + \Delta_{N_k}T, p) = f(t,p). \tag{1.11}$$

Поскольку множество $\bar{F}$ компактно, то согласно равенству (1.11) также имеет место равенство

$$\bar{F} = \bigcap_{k\geq 1} g^{\Delta_{N_k}T} \bar{F} \tag{1.12}$$

(см. [2, с. 105]). Предположим, что сходимость в (1.11) не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Тогда существует такое положительное число ε, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d(f(t + \Delta_{N_k}T, p), f(t, p)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому найдутся такие последовательности $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow \varepsilon$ положительных и $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что

$$\delta_k = \max_{-m_kT\leq t\leq m_kT} d(f(t + \Delta_{N_k}T, p), f(t, p)) \geq \varepsilon_k.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\lim_{k\to+\infty} \sup \delta_k \geq \varepsilon.$$

Последнее, однако, противоречит равенству (1.12). Значит, сходимость в равенстве (1.11) равномерна на всей оси $\mathbb{R}$.

Для всех $N = 1, 2, \ldots$ обозначим через F_N — множество функций

$$t \to f(t + (N + l)T, p), \quad l = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Пусть $\bar{F}_N$ — замыкание множества F_N. Тогда, поскольку $F_N \subset F_0$, то каждое из множеств F_N равностепенно непрерывно. Следовательно, все множества $\bar{F}_N$ компактны в топологии равномерной сходимости. Более того, согласно равенству (1.12) каждое из множеств $\bar{F}_N$ инвариантно. Поэтому существует компактное в топологии равномерной сходимости минимальное множество

$$M \subset \bigcap_{N\geq1} \bar{F}_N$$

(см. [1, с. 401]). Но в силу соотношения (1.12) справедливы равенства

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = \ldots = \bar{F}_N = \ldots = \bar{F}.$$

Значит,

$$\bar{F} = M. \tag{1.13}$$

Согласно (1.13) замыкание $\bar{K}$ траектории K движения $f(t, p)$ является компактным минимальным множеством. Следовательно, в силу теоремы Биркгофа о минимальных множествах и рекуррентных движениях $f(t, p)$ является рекуррентным движением (см. [1, с. 402]). □

З а м е ч а н и е 1.1. В условиях теоремы 1.1 выбор числа T не зависит от выбора последовательности $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и обратно.

2. Новое свойство минимальных множеств

Новое свойство минимальных множеств системы g^t тривиально вытекает из теоремы 1.1. Это свойство устанавливает следующая

Теорема 2.1. *Пусть q — некоторая точка пространства Σ и Ω — ω-предельное множество движения $f(t, q)$. Тогда, если пространство Σ компактно, то Ω — минимальное множество.*

Доказательство. Для всех $N = 0, 1, \ldots$ обозначим через Q_N — множество функций
$$t \to f(t + N + l, q), \quad l = 0, 1, \ldots,$$
определенных на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\bar{Q}_N$ — замыкание множества Q_N. Положим
$$Q = \bigcap_{N \geq 0} \bar{Q}_N. \tag{2.1}$$
Очевидно, что
$$\bar{Q}_0 \supset \bar{Q}_1 \supset \ldots \supset \bar{Q}_N \supset \ldots$$
Поэтому для каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ справедливо равенство
$$Q = \bigcap_{k \geq 1} \bar{Q}_{N_k}. \tag{2.2}$$

Если пространство Σ компактно, то каждое из множеств Q_N равностепенно непрерывно (см., например, [10, с. 212]). В этом случае множество Q непусто (см. [2, с. 105]). Более того,
$$\Omega = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} f(t, q)}.$$
Отсюда в силу теоремы 1.1 и равенств (2.1) и (2.2) следует, что Ω — минимальное множество. $\square$

Легко видеть, что утверждение, аналогичное теореме 2.1, справедливо также и для α-предельных множеств. Поэтому справедлива следующая

Теорема 2.2. *В компактном метрическом пространстве Σ каждое положительно (отрицательно) устойчивое по Пуассону движение $f(t, p)$ является рекуррентным.*

Замечание 2.1. В монографии [1, с. 38, 365] предприняты две попытки построения устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений на торе $\mathfrak{T}$ с циклическими координатами (ξ_1, ξ_2) с периодом, равным единице. Однако, обе эти попытки оказались неудачными.

В самом деле, следуя [1, с. 38], на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений
$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = \lambda(x_1^2 + x_2^2), \tag{2.3}$$
где λ — некоторое положительное иррациональное число. Считается, что каждое непродолжаемое решение этой системы определено на всей оси $\mathbb{R}$, т. е. является движением. Также считается, что движения системы (2.3) осуществляются по кривым уравнения
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda. \tag{2.4}$$
Кривые уравнения (2.4) порождают на торе $\mathfrak{T}$ эргодический поток (см., например, [12, с. 450]). Отсюда делается вывод, что на $\mathfrak{T}$ на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (2.3) порождает три типа движений:

Вообще говоря, утверждение о том, что каждое непродолжаемое решение системы (2.3) является движением, требует доказательства. Без этого доказательства разговор о движениях на торе $\mathfrak{T}$ лишен какого-либо смысла.

(α) положение равновесия $(0,0)$;

(β) положительно асимптотические и отрицательно устойчивые по Пуассону;

(γ) отрицательно асимптотические и положительно устойчивые по Пуассону.

Последнее, однако, неверно, поскольку правые части системы (2.3) не являются периодическими и, следовательно, непродолжаемые решения этой системы, отличные от положения равновесия $(0,0)$, не могут быть представлены на торе $\mathfrak{T}$.

В примере на [1, с. 365] данная неточность устранена. Однако это никак не меняет существо проблемы.

В самом деле, следуя [1, с. 365], на плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2), \tag{2.5}$$

где λ — положительное иррациональное число. Правые части системы (2.5) равномерно ограничены. Поэтому все непродолжаемые решения этой системы являются движениями. Считается, что все такие движения осуществляются по кривым уравнения (2.4). Если это так, то на торе $\mathfrak{T}$ на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (2.5) порождает три указанных выше типа движений (α), (β) и (γ). Более того, для этих типов движений имеет место тождество

$$\dot{x}_1(t) \equiv \sin^2 \pi x_1(t) + \sin^2 \pi \lambda x_1(t).$$

Следовательно, на плоскости $\mathbb{R}^2$ движение $(x_1(t), x_2(t))$ типа (γ) удовлетворяет условиям

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = +\infty. \tag{2.6}$$

Для некоторой последовательности $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ при всех достаточно больших k положим

$$x_{1k} = x_1(t_k) - i_k, \quad x_{2k} = x_2(t_k) - j_k,$$

где $x_{1k} \in [0,1)$, $x_{2k} \in [0,1)$ и i_k, j_k — соответствующие натуральные числа. В силу условий (2.6) без какой-либо потери общности можем считать, что в $\mathbb{R}^2$ точки (x_{1k}, x_{2k}) лежат на разных траекториях системы (2.5). Поэтому говорить о положительной устойчивости по Пуассону движения $(x_1(t), x_2(t))$ на торе $\mathfrak{T}$ можно лишь в смысле равенств

$$x_1(0) = \lim_{k\to+\infty} x_{1k}, \quad x_2(0) = \lim_{k\to+\infty} x_{2k}$$

и при условии, что движения системы (2.5) осуществляются по кривым уравнения (2.4); последнее в [1, с. 365] не доказано.

References

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Издательство URSS, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[2] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984. [J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

[3] R. K. Miller, “Almost periodic differential equations as dynamical systems with application to existence of a.p. solutions”, *Journal of Differential Equations*, **1**:3 (1965), 337–345.

[4] L. G. Deysach, G. R. Sell, “On the existence of almost periodic motions”, *The Michigan Math. J.*, **12**:1 (1965), 87–95.

[5] V. M. Millionshchikov, “Recurrent and almost periodic limit solutions of non-autonomous systems”, *Differential Equations*, **4**:9 (1968), 1555–1559.

[6] N. P. Bhatia, S.-N. Chow, “Weak attraction, minimality, recurrence, and almost periodicity in semisystems”, *Funkcialaj Ekvacioj*, **15** (1972), 35–59.

[7] D. N. Cheban, *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations*, HPC, New York, 2009.

[8] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:11 (2005), 1469–1474; англ. пер.:A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “On recurrent trajectories, minimal sets, and quasiperoidic motions of dynamical systems”, *Differential Equations*, **41**:11 (2005), 1544–1549.

[9] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Слабый периодический оператор сдвига и обобщенно-периодические движения”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:1 (2013), 123–127; англ. пер.:A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “Weak periodic shift operator and generalized-periodic motions”, *Differential Equations*, **49**:1 (2013), 126–131.

[10] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, *Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах*, Издательство ЛКИ, М., 2007. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, *Poisson Stability in Dynamical and Continuous Periodic Systems*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

[11] Л. Шварц, *Анализ*. V. 2, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys*. V. 2, Moscow, 1972 (In Russian)].

[12] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, М., Издательство ЛКИ, 2007. [E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

Информация об авторах

Афанасьев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apa@isa.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем. Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Дзюба Сергей Михайлович
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Поступила в редакцию 08.09.2020 г.
Поступила после рецензирования 22.12.2020 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the authors

Aleksandr P. Afanas’ev, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences; Professor, HSE University; Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: apa@isa.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department. Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Sergei M. Dzyuba
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Received 08.09.2020
Reviewed 22.12.2020
Accepted for press 05.03.2021